

i) Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, η οποία είναι συνεχής.

Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx.$$

ii) Έστω συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$g(x) = g(\alpha + \beta - x) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x(\epsilon\phi x + \sigma\phi x) dx = \frac{\pi}{4} \ln 3.$

Λύση

i) Θέτουμε $u = \alpha + \beta - x$. Οπότε $du = -dx$ ή $dx = -du$.

Για $x = \alpha$ είναι $u = \beta$ ενώ για $x = \beta$ είναι $u = \alpha$.

Έχουμε λοιπόν

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

ii) Για τη συνάρτηση $xg(x)$ εφαρμόζουμε το συμπέρασμα του ερωτήματος i) και παίρνουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - x)g(\alpha + \beta - x) dx.$$

Ομως $g(\alpha + \beta - x) = g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Άρα
$$\int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - x)g(x) dx$$

$$\text{ή ισοδύναμα} \quad \int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx$$

$$\text{δηλαδή} \quad 2 \int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

$$\text{και τελικά} \quad \int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

iii) Αν $g(x) = \varepsilon\phi x + \sigma\phi x$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = \frac{\pi}{3}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} g(\alpha + \beta - x) &= g\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \sigma\phi x + \varepsilon\phi x = g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ερωτήματος ii) σύμφωνα με το οποίο ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x(\varepsilon\phi x + \sigma\phi x) dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} xg(x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} g(x) dx = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\varepsilon\phi x + \sigma\phi x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\eta x} + \frac{\sigma\eta x}{\eta\mu x} \right) dx = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-\ln \sigma\eta x + \ln \eta\mu x)' dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\ln \varepsilon\phi x)' dx = \frac{\pi}{4} \left[\ln \varepsilon\phi x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\ln \sqrt{3} - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{4} \ln 3. \end{aligned}$$